3 APPUNTI SUI FASCI DI PARABOLE (raccolti dal prof. G. Traversi)

3.1 LA PARABOLA E LE SUE PROPRIETA'

La parabola è una curva "apparentemente aperta" che si ottiene come sezione piana di un cono di rotazione indefinito con un piano parallelo alla generatrice del cono. In questo contesto essa prende il nome di conica non degenere.

Dal punto di vista algebrico tale curva esprime il grafico di funzioni di secondo grado in casi particolari, ma rappresenta anche una equazione di secondo grado completa nelle variabili x e y più in generale.

La definizione di parabola è legata ad una sua proprietà caratteristica, cioè rappresenta il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso F, detto fuoco, e da una retta fissa *d*, chiamata direttrice. Infatti indicata con *p* la distanza FH, dove H è il piede della perpendicolare condotta da F alla retta *d*, tale valore individua il "parametro" della parabola. Inoltre si può utilizzare un criterio generale di classificazione delle curve di secondo grado con il rapporto tra le distanze di un punto P dal fuoco e dalla direttrice, che prende il nome di eccentricità *e*. Da quanto espresso nella definizione, si deducono diverse informazioni sulla forma della parabola:

- I punti della parabola si trovano solo in uno dei due semipiani individuati dalla direttrice d, quello che contiene il fuoco;
- il vertice V della parabola è il punto medio della distanza minima FH tra il fuoco F e la direttrice *d*;
- la concavità della parabola è rivolta dalla parte opposta a quella cui appartiene la direttrice;
- la retta *s*, contenendo il segmento FH, è perpendicolare a *d*; inoltre i punti laterali, che rispettano il luogo geometrico, hanno uguale distanza da *s*, per cui *s* è l'asse di simmetria della figura.

Sul piano geometrico sono molto importanti le seguenti proprietà:

1) Le tangenti alla parabola uscenti da un punto qualsiasi della retta direttrice sono tra loro perpendicolari; inoltre il segmento congiungente i punti di tangenza passa per il fuoco.
2) La retta normale per un punto P qualunque della parabola divide a metà l'angolo formato dal raggio focale FP e la parallela per P all'asse di simmetria della curva.
3) La parabola è una conica con eccentricità $e = 1$.

In un riferimento cartesiano ortogonale la parabola con vertice nell'origine e asse di simmetria coincidente con l'asse y ha equazione:
$y = ax^2$ con $a = 1/2p$ (dove a individua la concavità e p il parametro della parabola). (1) Fig.1

Con una opportuna traslazione si ottiene una parabola con asse parallelo all'asse y, la cui equazione assume la forma canonica $y = ax^2 + bx + c$ (con $a, b, c \in \mathbf{R}$). (2) Fig.2

Analogamente applicando alla (1) e (2) una simmetria degli assi cartesiani, ossia scambiando x con y e y con x, si ottengono nei due casi le equazioni delle parabole con asse di simmetria, rispettivamente, coincidente o parallelo con l'asse delle ascisse. In simboli:

$x = ay^2$ (1') fig.3 e $x = ay^2 + by + c$ (2') fig.4

Nella parabola in forma canonica (2), utilizzando la seguente identità:

$y = a(x + b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a$, si ricavano le importanti formule classiche degli elementi caratteristici,

vertice $V(-b/2a; (4ac - b^2)/4a)$; fuoco $F(-b/2a; (1 + 4ac - b^2)/4a) = (x_v ; y_v + 1/4a)$

asse $x = -b/2a$; direttrice $y = -(1 + b^2 - 4ac)/4a$ cioè $y = y_v - 1/4a$.

Nel caso di parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse le formule precedenti sono valide se si invertono le ascisse con le ordinate e se si sostituisce la lettera x con la y e viceversa.

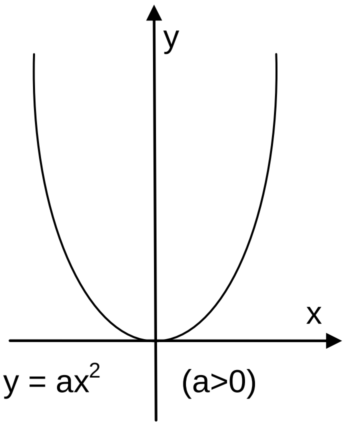

Fig.1

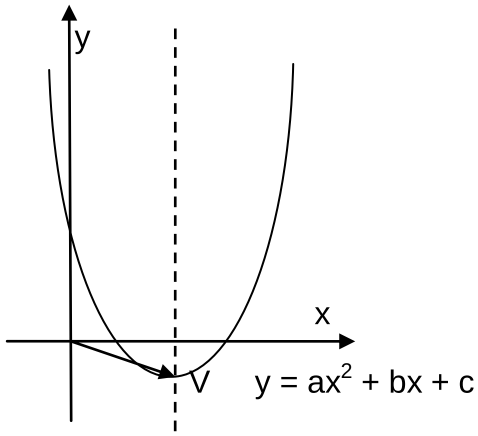

Fig.2

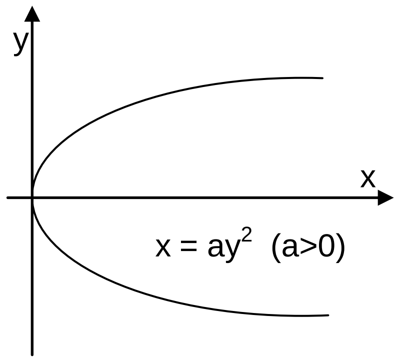

Fig.3

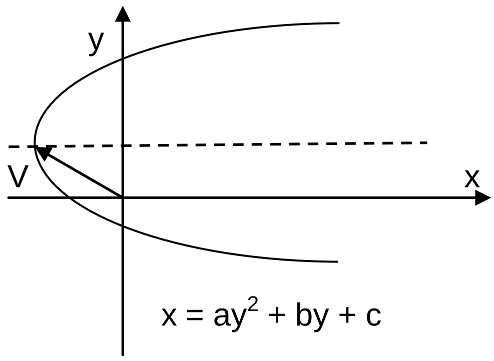

Fig.4

Da quanto finora illustrato è opportuno chiedersi se è possibile generalizzare il concetto di parabola con assi di simmetria o direttrici oblique. Dal punto di vista geometrico una risposta affermativa esiste senza nessuna differenza delle proprietà enunciate; sul piano algebrico invece si introduce una equazione ben più estesa (fino a sei termini) che rientra nella trattazione delle coniche in generale, ma comunque interessante per qualche proprietà tipica in grado di riconoscerla facilmente, come esposto successivo paragrafo.

3.2 EQUAZIONE GENERALE DELLA PARABOLA

Considerata una retta d: $ax + by + c = 0$ ed un punto $P(x_0 ; y_0)$ non appartenente a d, si individua una parabola con direttrice d attraverso l'equazione

(3.2.1) $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, dove i parametri sono legati dalle seguenti relazioni:

$A = b^2$; $B = -2ab$; $C = a^2$; $D = -2x_0(a^2 + b^2) - 2ac$; $E = -2y_0(a^2 + b^2) - 2bc$;

$F = (a^2 + b^2)(x_0^2 + y_0^2) - c^2$.

In tale contesto P rappresenta il fuoco della parabola, per cui basterebbero due entità geometriche, una retta ed un punto, per definire in modo univoco una parabola generica, come applicazione operativa della definizione espressa mediante luogo geometrico. Sul piano algebrico però occorrono ben 5 condizioni essenziali per determinare l'equazione di una parabola con asse obliquo. Comunque una è facilmente riscontrabile: osservando attentamente i coefficienti A, B, C dei termini di 2^ grado, l'insieme dei tre termini deve formare un quadrato perfetto nelle variabili x e y, dopo aver verificato che l'intero polinomio non risulti scomponibile nel prodotto di due fattori di 1^ grado; in quest'ultimo caso la curva degenera in due rette. Più semplice è l'equazione di una parabola con asse verticale o orizzontale (parallelo ad uno degli assi coordinati) che dipende solo da 3 condizioni essenziali, come illustrato nel paragrafo precedente. In tale contesto risulta molto utile l'equazione in forma canonica che sintetizza e racchiude tutte le proprietà generali delle equazioni di 2^ grado; rappresenta inoltre uno dei più semplici esempi di funzione non lineare.

ESEMPIO 3.2.1: Determinare l'equazione della parabola con fuoco in $F(0 ; 1)$ e retta direttrice d: $y + 1 = 0$.

Trattandosi di una parabola con direttrice orizzontale, l'equazione da ricavare è formata solo dai parametri a, b, c , per cui basta risolvere il sistema con tre equazioni poste dalle due condizioni del fuoco e dall'altra fornita dalla direttrice. In simboli:

$x = -b/2a = 0$; $y = (1 - b^2 + 4ac)/4a = 1$ d: $y = -(1 + b^2 - 4ac)/4a = -1$; *da cui il sistema:*

$$\begin{cases} -b/2a = 0 \\ (1 - b^2 + 4ac)/4a = 1 \\ -(1 + b^2 - 4ac)/4a = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \quad \text{con } a \neq 0 \\ 1 + 4ac = 4a \\ -1 + 4ac = -4a \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ 8ac = 0 \text{ ; } c = 0 \\ -1 = -4a \end{cases} ; \quad \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \text{ ; } \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

da cui l'equazione $x^2 - 4y = 0$.

ESEMPIO 3.2.2: Determinare l'equazione della parabola con fuoco in $F(1 ; 1)$ e retta direttrice d: $x + y + 2 = 0$.

Essendo una parabola con direttrice obliqua, l'equazione è costituita da sei parametri (A, B,….,F), di cui cinque sono essenziali, per cui la risoluzione può avere due modalità diverse: a) la ricerca dei coefficienti A,…. ,F mediante le formule illustrate all'inizio del paragrafo; b) l'applicazione diretta della definizione di luogo geometrico

In questo caso, utilizzando il punto b) si costruisce una equazione sulla base delle seguenti condizioni: dato un punto P(x ; y) della parabola, la distanza $PF = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$ *deve essere uguale alla distanza di P dalla direttrice* $d(P;d) = |x + y + 2| / \sqrt{1+1}$ *;*
confrontando le due distanze si ottiene: $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = |x + y + 2| / \sqrt{2}$ *; si elevano al quadrato entrambi i membri dell'equazione in modo da pervenire al risultato*

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = (x^2 + 2xy + 4x + 4y + y^2 + 4) / 2$;

$2(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1) - (x^2 + 2xy + 4x + 4y + y^2 + 4) = 0$, *cioè*

$x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$

La fig.5 rappresenta una parabola che ha come asse la bisettrice del 1^ e 3^ quadrante, il vertice nell'origine e passa per i punti di coordinate (8 ; 0) e (0 ; 8).

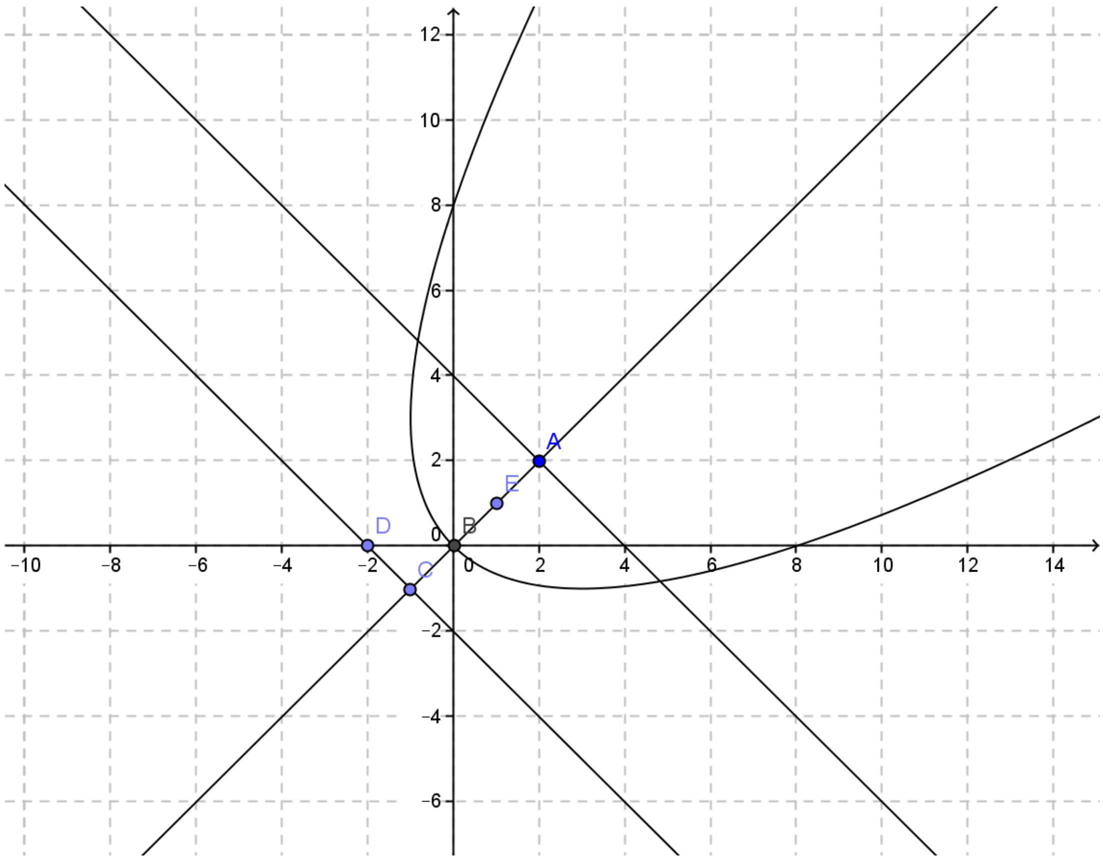

Fig.5

3.3 PROBLEMI CLASSICI DELLA PARABOLA

3.3.1 Parabola passante per tre punti

Dati tre punti A, B, C di coordinate note è possibile determinare l'equazione della parabola con asse verticale (orizzontale), attraverso la risoluzione di un sistema lineare di tre equazioni nelle incognite a, b, c, dopo aver sostituito le variabili x e y con le coordinate dei tre punti a, B, C all'equazione generica.

ESEMPIO 3.3.1: Determinare l'equazione della parabola con asse verticale passante per i punti A(0 ; 2), B(3 ; - 1) e C(1 ; - 1).

Considerata l'equazione canonica $y = ax^2 + bx + c$*, si sostituiscono le coordinate dei tre punti a x e y; si ottiene quindi il sistema*

$$\begin{cases} c = 2\,; \\ 9a + 3b + c = -1 \\ a + b + c = -1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} c = 2 \\ 9a + 3b + 3 = 0 \\ a + b + 2 = -1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} c = 2 \\ b = -1 - 3a \\ a - 1 - 3a + 2 = -1 \end{cases} \quad ;$$

da cui $a = 1$, $b = -4$, $c = 2$.

L'equazione della parabola è $y = x^2 - 4x + 2$

con vertice in V(2 ; - 2) e grafico illustrato

nella fig.6

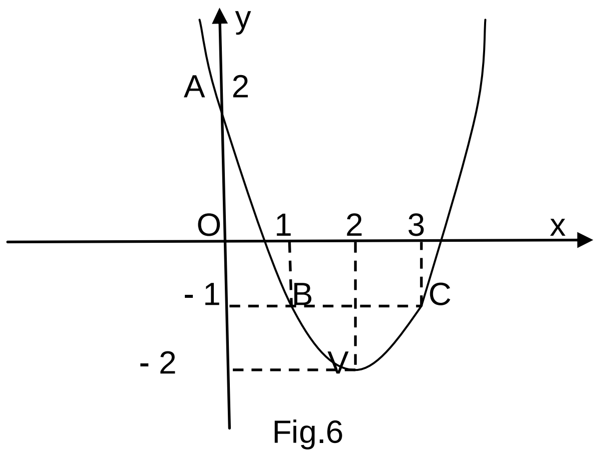

Fig.6

3.3.2 Parabola passante per un punto e con vertice assegnato

Conoscendo le coordinate del vertice V e di un punto A di una parabola *p* con asse verticale è possibile determinare la sua equazione attraverso la risoluzione di un sistema lineare fratto nelle incognite a, b e c. Infatti, essendo V e A punti della parabola, si sfrutta la condizione di passaggio di *p* su entrambi e il fatto che V giace sull'asse di equazione x = - b/2a; in dettaglio:

$$\begin{cases} y_v = ax_v^{\,2} + bx_v + c \\ y_p = ax_p^{\,2} + bx_p + c \\ -b/2a = x \end{cases} \quad ;$$

ESEMPIO 3.3.2: Determinare l'equazione della parabola con asse verticale di vertice V(-1 ; -1) e passante per il punto A(-2 ; 0)

Basta sostituire nell'equazione canonica le coordinate di V e A e indicare con x = - 1 l'equazione dell'asse contenente V per costruire il sistema; risolvendo per sostituzione si ottiene:

$$\begin{cases} a - b + c = -1 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ -b/2a = -1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a - 2a + c = -1 \\ 4a - 4a + c = 0 \\ b = 2a \end{cases} ; \quad \begin{cases} a = 1 \\ c = 0 \\ b = 2 \end{cases} .$$

L'equazione della parabola è $y = x^2 + 2x$ *con grafico nella fig.7*

.

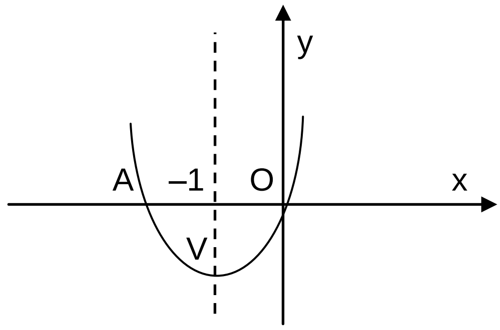

Fig.7

3.3.3 PARABOLE E RETTE

Considerata una parabola *p* generica ed una retta *r*, è molto importante rilevare la reciproca posizione tra p e r sul piano cartesiano per individuare gli eventuali punti d'intersezione o di contatto. Algebricamente l'intersezione tra p e r si trasforma nella risoluzione di un sistema di 2^ grado in cui le eventuali soluzioni possono essere 2, 1 o nessuna. Esaminando il discriminante Δ dell'equazione risolvente del sistema si presentano le tre situazioni:

a) se $\Delta > 0$, il sistema ammette due soluzioni reali e distinte, che tradotte geometricamente individuano due punti di intersezione A e B; in simboli: $p \cap r = \{A;B\}$; fig.8

b) se $\Delta = 0$, il sistema ammette due soluzioni reali e coincidenti, che tradotte geometricamente individuano un punto P di contatto doppio; in simboli: $p \cap r = \{P\}$; fig.9

c) se $\Delta < 0$, il sistema non ammette soluzioni reali, ma solo immaginarie coniugate, che tradotte geometricamente non individuano alcun punto di intersezione o di contatto; in simboli: $p \cap r = \varnothing$; fig.10

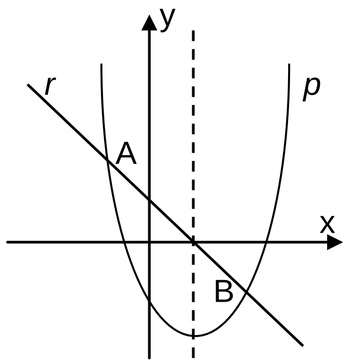

Fig.8

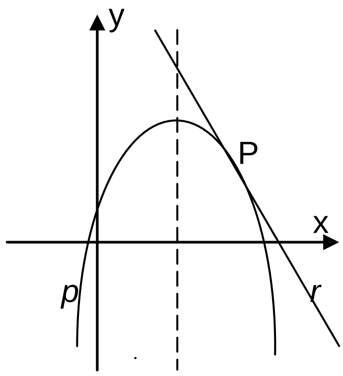

Fig.9

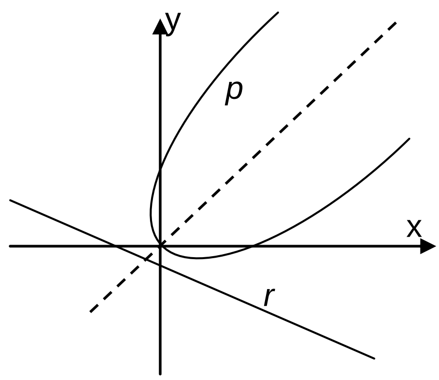

Fig.10

OSSERVAZIONE: E' importante precisare che , considerata la struttura della parabola (figura simmetrica solo rispetto a un asse), le eventuali due intersezioni di r con p si ottengono quando r non è parallela all'asse di simmetria, altrimenti l'intersezione risulta una sola al finito, ottenuta algebricamente da una equazione risolvente di 1^ grado, con eliminazione del termine di 2^ grado, che a sua volta individua una soluzione all'infinito nell'ambito del piano proiettivo (fig.11).

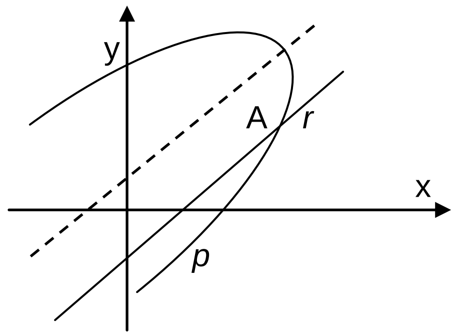

Fig.11

3.3.4 PARABOLA E RETTE TANGENTI

Considerata l'equazione generale della parabola con asse verticale: $y = ax^2 + bx + c$

ed un punto P(x_0 ; y_0) esterno alla parabola, si vogliono trovare le rette tangenti alla parabola passanti per il punto P. Il problema viene risolto attraverso l'impostazione della cosiddetta condizione di tangenza. Si costruisce il fascio proprio di rette con centro nel punto P

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Quindi si imposta il sistema delle equazioni retta-parabola:

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

Il sistema non viene risolto in quanto si tratta di un sistema parametrico (oltre alle incognite x e y c'è il parametro m); ma, dopo opportuna sostituzione, si ottiene l'equazione di 2º grado in x di parametro m associata al sistema:

$$\begin{cases} y = m(x - x_0) + y_0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = m(x - x_0) + y_0 \\ ax^2 + bx + c = m(x - x_0) + y_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = m(x - x_0) + y_0 \\ ax^2 + (b - m)x + c + mx_0 - y_0 = 0 \end{cases}$$

Come illustrato al paragrafo precedente, dall'equazione di 2º grado si ricava il discriminante che dipende dal parametro m e si impone la condizione di tangenza $\Delta = 0$

Le soluzioni di questa equazione, di incognita m, sono i coefficienti angolari m_1 e m_2 delle due rette tangenti alla parabola che vanno sostituiti nell'equazione del fascio proprio.

Se il punto P giace sulla parabola, le soluzioni dell'equazione ricavata dal discriminante $\Delta = 0$ risultano reali e coincidenti, essendo il trinomio in m un quadrato perfetto; di conseguenza la retta tangente in P è unica e P viene considerato punto con molteplicità 2 di intersezione.

ESEMPIO 3.3.3a Determinare le equazioni delle tangenti alla parabola *p*: $y = -x^2 + 2x + 3$ uscenti dal punto E(0 ; 4)

Si costruisce prima il fascio f di rette per E: y – 4 = m(x – 0) , ossia y = mx + 4 e si imposta il sistema p∩f

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = mx + 4 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} mx + 4 = -x^2 + 2x + 3 \\ y = mx + 4 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x^2 - (2 - m)x + 1 = 0 \\ y = mx + 4 \end{cases} ;$$

dall'equazione risolvente si ricava il discriminante $\Delta = 0$, *ottenendo* $(2 - m)^2 - 4(+1) = 0;$

cioè $m^2 - 4m + 4 - 4 = 0;$ $m(m - 4) = 0$, *da cui* $m_1 = 0$ *e* $m_2 = 4$. *Le due tangenti sono quindi:*

t_1: $y = 4$ *nel vertice V(1 ; 4) e* t_2: $y = 4x + 4$ *nel punto C(–1 ; 0). Fig.12*

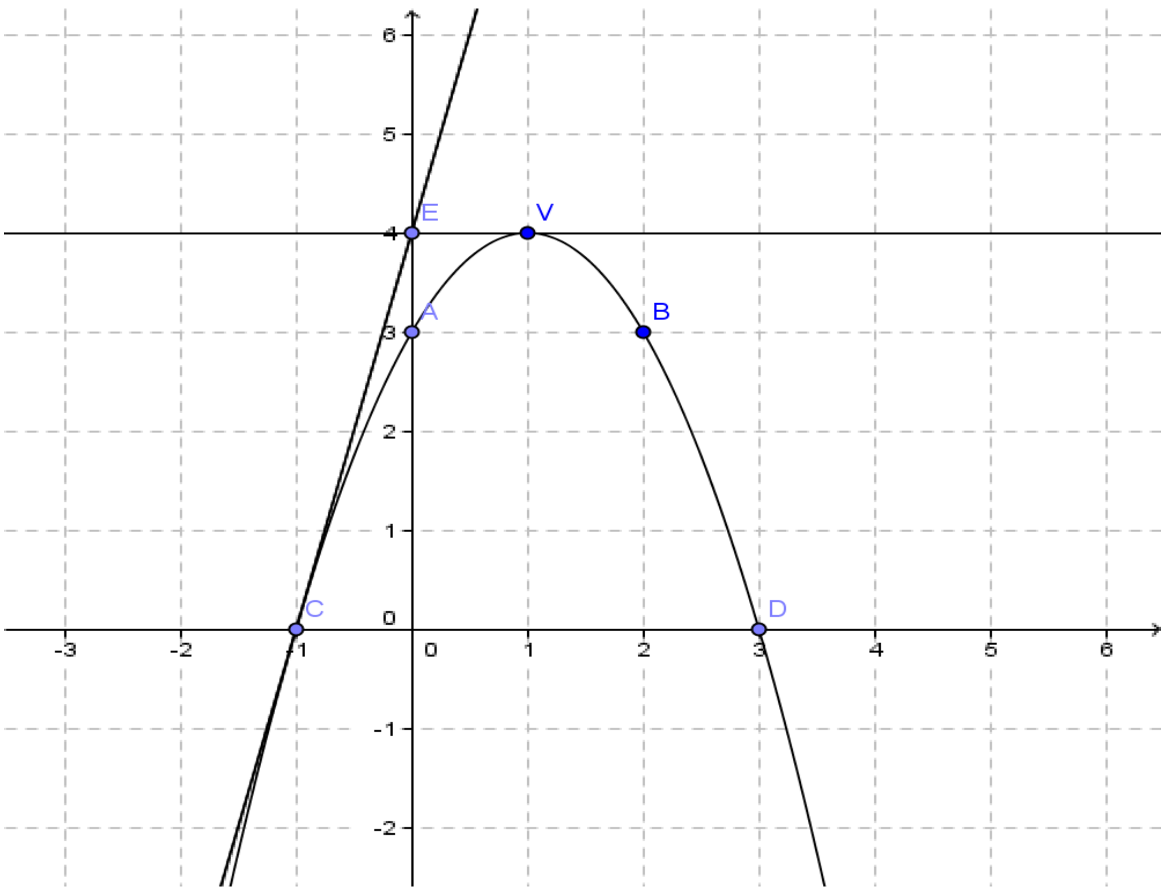

Fig.12

ESEMPIO 3.3.3b Data la parabola p di equazione $y = ½x^2 + 2x – 1$, determinare la retta tangente a *p* nel punto A(– 4 ; – 1) ϵ p; rappresentare poi la figura.

Analogamente a quanto illustrato nell'esempio precedente, prima si costruisce il fascio f di rette per A e poi si imposta il sistema. Infatti f: $y + 1 = m(x + 4)$; $p\cap f$:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \\ y = mx + 4m - 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = mx + 4m - 1 \\ y = mx + 4m - 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + (2 - m)x - 4m = 0 \\ y = mx + 4m - 1 \end{cases} ; \quad \text{da cui}$$

l'equazione risolvente diventa $x^2 + 2(2 – m)x – 8m = 0$. *La condizione di tangenza si ricava ponendo* $\Delta = 0$ $(2 – m)^2 + 8m = 0$; $4 + m^2 – 4m + 8m = 0$; $m^2 + 4m + 4 = 0$; $(m + 2)^2 = 0$, *ossia* $m = – 2$ *(2 volte); per cui la retta tangente risulta* $y = – 2x – 9$ *(fig13)*

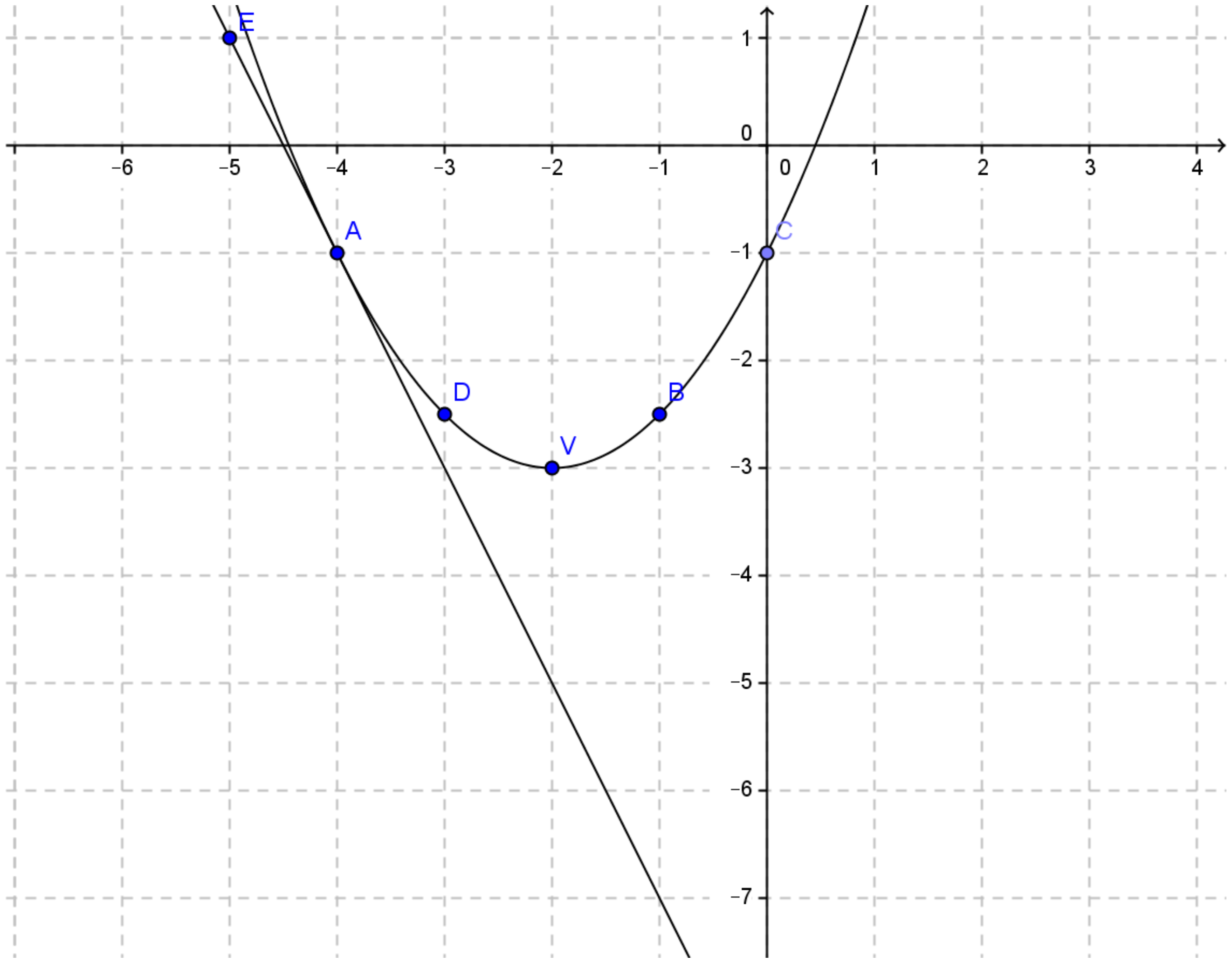

Fig.13

3.4 INTRODUZIONE AI FASCI DI PARABOLE

Per analizzare le proprietà caratteristiche dei coefficienti a, b, c, comuni a tutte le parabole, è conveniente verificare il loro andamento utilizzando equazioni che differiscono per uno solo dei coefficienti; poiché in ognuno di questi insiemi compare un solo parametro di primo grado, ciascuno di essi rappresenta un fascio di parabole. Di fatto si possono costruire tre esempi:

1) *Qual è la caratteristica comune alle parabole di equazione* $y = x^2 - 4x + c$ *(con c* $\in$ ***R****)?*

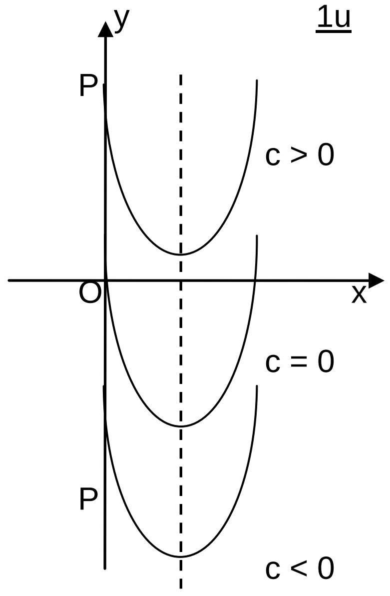

Fig.14

Osservando la fig.14,

si tratta di un insieme di parabole aventi concavità (a = 1) rivolta verso l'alto e per asse di simmetria la retta x = 2.

Se c = 0 la parabola passa per l'origine,

altrimenti interseca l'asse y nel punto P di coordinate (0 ; c).

Tutte le parabole sono corrispondenti per traslazione rispetto ad un vettore la cui direzione è l'asse di simmetria.

2) *Qual è la caratteristica comune alle parabole di equazione* $y = ax^2 - 4x + 2$ *(a* $\in$ ***R - 0****)?*

In questo caso tutte le parabole dell'insieme hanno in comune il punto P(0 ; 2).
Essendo $a \neq 0$ variabile, la loro concavità ha ampiezza diversa, inoltre non sono costanti né l'asse di simmetria né il vertice, poiché dipendono da a.
Quindi le coordinate del vertice sono rispettivamente $x = 2/a$ e $y = 2 - 4/a$.
Se si esaminano i due casi fondamentali sul segno di a, emerge quanto segue:

- $a > 0$, le parabole volgono la concavità verso l'alto ed hanno il vertice nel semipiano positivo delle ascisse e al di sotto della retta $y = 2$;

- $a < 0$, le parabole volgono la concavità verso il basso ed hanno il vertice nel semipiano negativo delle ascisse e al di sopra della retta $y = 2$;

La fig.15a evidenzia 5 parabole, ciascuna con il vertice e 2 coppie di punti simmetrici rispetto all'asse. Infatti,

per a = 1 l'equazione diventa $y = x^2 - 4x + 2$ *con vertice in C(2 ; - 2);*

per a = - 1 l'equazione diventa $y = -x^2 - 4x + 2$ *con vertice in G(- 2 ; 6);*

per a = ½ l'equazione diventa $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$ *con vertice in K(4 ; - 6);*

per a = - 2 l'equazione diventa $y = -2x^2 - 4x + 2$ *con vertice in O(- 1 ; 4);*

per a = 2 l'equazione diventa $y = 2x^2 - 4x + 2$ *con vertice in B(1 ; 0).*

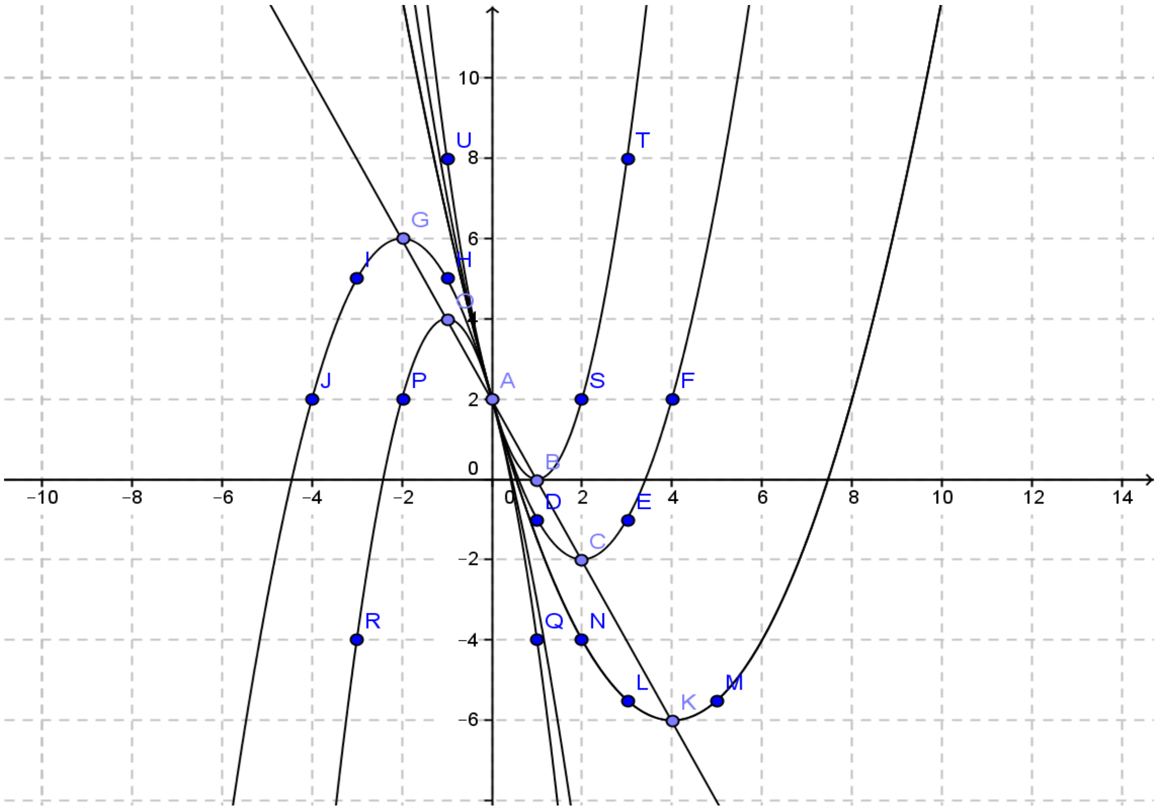

Fig.15a

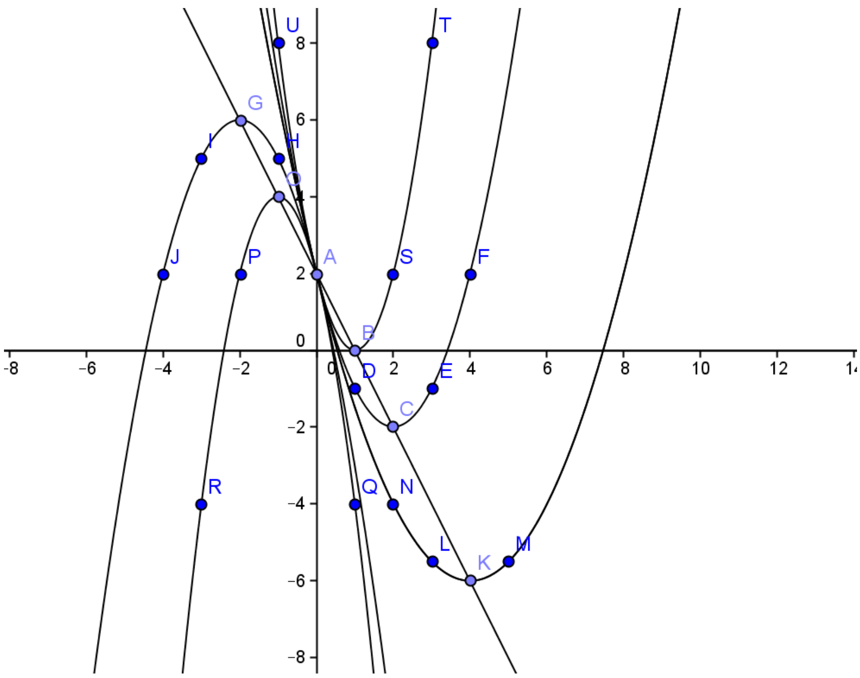

Fig.15b

Da una attenta osservazione dei grafici si individua la seguente proprietà: <u>tutti i vertici sono allineati sulla retta $2x + y - 2 = 0$</u>; infatti, considerate le coordinate del vertice di una generica parabola della famiglia $x = 2/a$ e $y = 2 - 4/a$, si ricava $a = 2/x$ e si sostituisce nell'ordinata, ottenendo $y = 2 - 4/2/x$, cioè $y = 2 - 2x$. Sostanzialmente tutti i punti di questa retta possono essere vertici del fascio di parabole, tranne $(0 ; 2)$ in quanto per $x = 0$ le coordinate del vertice perdono di significato.

In conclusione si può affermare che la retta individuata è il luogo geometrico dei vertici relativi al fascio di parabole *$y = ax^2 - 4x + 2$ (a є **R - 0**).*

*3) Qual è la caratteristica comune alle parabole di equazione $y = x^2 + bx + 3$ (b є **R**)?*

In questa situazione tutte le parabole della famiglia hanno concavità a = 1 (verso l'alto) e passano per lo stesso punto P(0 ; 3), mentre l'asse di simmetria ed vertice risultano variabili, poiché dipendono da b. Allora,

- se b = 0 , l'equazione diventa $y = x^2 + 3$, la parabola è simmetrica rispetto all'asse y; fig.16
- se b ≠ 0 , le coordinate del vertice sono $x = -b/2$ e $y = (12 - b^2)/4 = 3 - b^2/4$, cioè $V(-b/2 \; ; \; 3 - b^2/4)$. Indicando con x e y le coordinate del vertice ed eliminando b mediante sostituzione, si ottiene il legame $y = 3 - x^2$, che rappresenta una parabola di vertice (0 ; 3) con concavità (a = – 1) rivolta verso il basso; i suoi punti sono i vertici del fascio di parabole considerato. (fig.17)

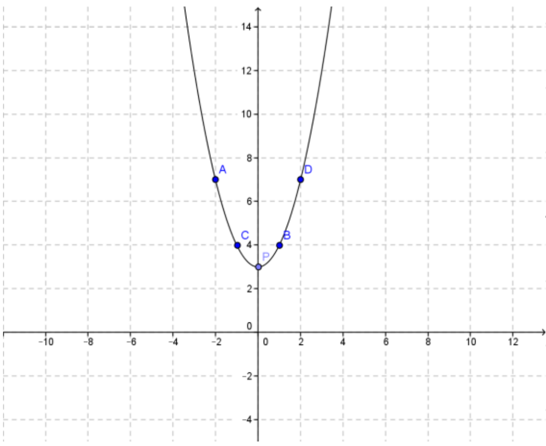

Fig.16

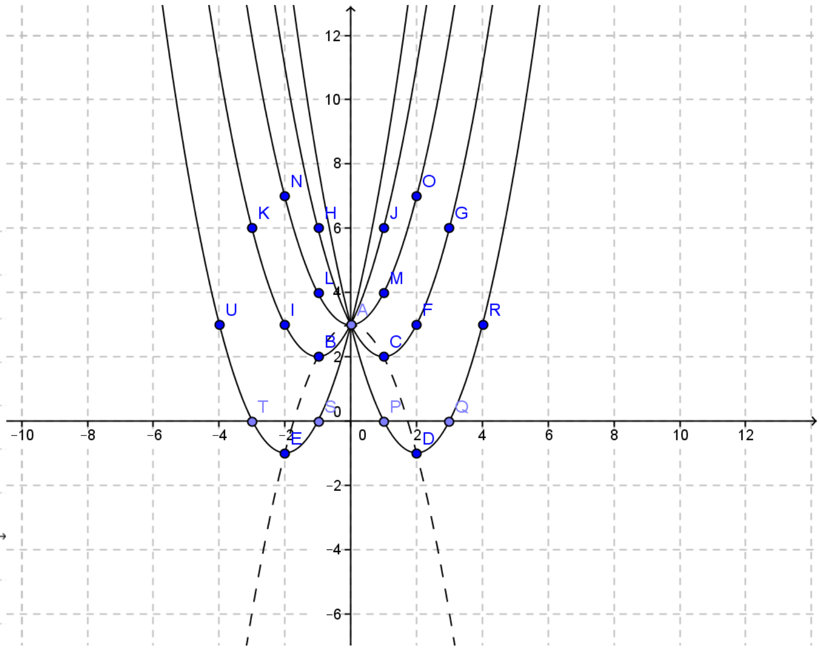

Fig.17

Inoltre le considerazioni illustrate per i fasci di circonferenze valgono anche per i fasci di parabole:

a) fascio di parabole con asse parallelo all'asse y passanti per due punti A e B; l'equazione assume la forma $y = mx + q + k \cdot (x - x_A)(x - x_B)$, dove $y = mx + q$ è l'equazione della retta per A e B; fig.18

b) fascio di parabole con asse parallelo all'asse y tangenti a una retta $y = mx + q$ in un suo punto A di ascissa x_A; in questo caso l'equazione diventa $y = mx + q + k \cdot (x - x_A)^2$; fig.19

c) fascio di parabole con vertice nel punto $V(x_V \; ; \; y_V)$; l'equazione è $y - y_V = a(x - x_V)^2$; fig.20

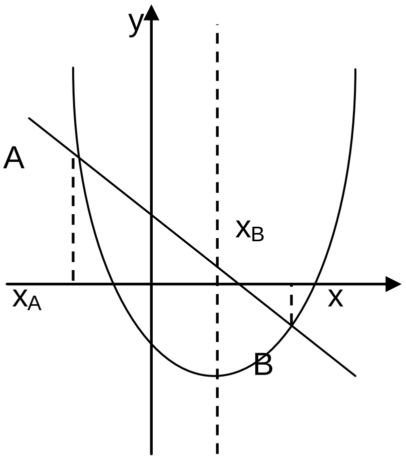

Fig.18

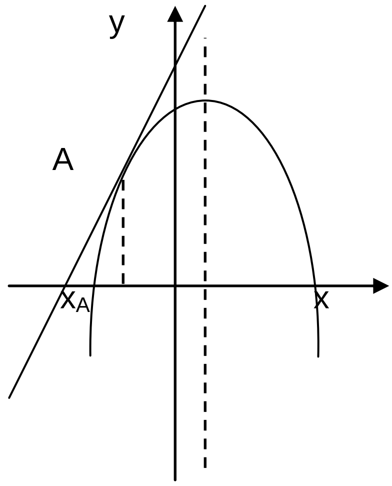

Fig.19

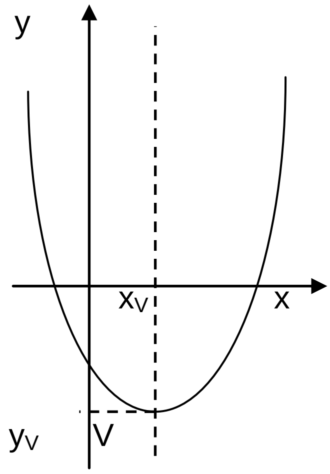

Fig.20

3.5 FASCI E PUNTI BASE

Generalizzando il concetto di fascio di parabole con assi verticali, si può affermare che esso è determinato da una combinazione lineare tra due generiche parabole, chiamate generatrici, legate da un parametro k che le tiene insieme in una unica equazione. Infatti date due parabole
p_1: $y = a_1x^2 + b_1x + c$ e p_2: $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$
con asse parallelo all'asse y, si costruisce il fascio attraverso l'equazione $p_1 + k \cdot p_2 = 0$, cioè

$a_1x^2 + b_1x + c - y + k \cdot (a_2x^2 + b_2x + c_2 - y) = 0$, con $k \in \mathbf{R}$ (3.5.1)

Le condizioni di esistenza impongono, come nel caso delle rette, l'eliminazione della p_2 che non si ottiene per alcun valore di k al finito. Inoltre, si può esprimere il fascio in forma esplicita nella forma:

$$\boxed{y = \frac{x^2(a_1 + ka_2)}{k+1} + \frac{x(b_1 + kb_2)}{k+1} + \frac{c_1 + kc_2}{k+1}}$$

con $k \neq -1$ e $k \neq -a_1 / a_2$. (3.5.1a)

L'individuazione degli eventuali punti base si ottiene mediante l'intersezione tra le due parabole, che algebricamente impongono la risoluzione del sistema formato da p_1 e p_2; esaminando in dettaglio l'equazione risultante del sistema e indicando con Δ il discriminante:
$(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + c_1 - c_2 = 0$; (3.5.2)
le situazioni che si possono analizzare sono le seguenti:

1. $\Delta > 0$ e $a_1 \neq a_2$; <u>ci sono due punti base A e B</u> le cui ascisse risultano soluzioni reali e distinte della (3.5.2) e nel caso di $k = -1$ rappresentano una coppia di rette parallele all'asse y di equazione $x = x_A$ e $x = x_B$, la cui unione fornisce una parabola degenere; inoltre per $k = -a_1/a_2$ e $k \neq -1$ la (3.5.1a) fornisce l'equazione della retta r

passante per A e B: r) $(b_1a_2 - a_1b_2)x - (a_2 - a_1)y + c_1a_2 - a_1c_2 = 0$ (3.5.3) (fig.21).

2. $\Delta = 0$ e $a_1 \neq a_2$; esiste un solo punto base (doppio) A, la cui ascissa $x_A = (b_2 - b_1) / 2(a_1 - a_2)$, che nel caso di $k = -1$ rappresenta la retta parallela all'asse y passante per A e appartenente al fascio; in questo caso la parabola degenere è formata dalla coppia di rette coincidenti $x = x_A$; inoltre la (3.5.1a) per $k = -a_1/a_2$ e $k \neq -1$ fornisce l'equazione della retta r (3.5.3), che risulta tangente a tutte le parabole del fascio (fig.22).

3. $\Delta < 0$ e $a_1 \neq a_2$; non ci sono punti base, il fascio contiene una sola retta r, che si ricava per $k = -a_1/a_2$, rappresentata dalla (3.5.3); due parabole qualunque della famiglia non si intersecano mai (fig.23).

4. $a_1 = a_2$ e $b_1 \neq b_2$; dalla (3.5.2) si ricava un punto base A di ascissa $x = (c_2 - c_1)/(b_1 - b_2)$, che per $k = -1$ rappresenta la retta verticale passante per A. In questo caso tutte le parabole della famiglia hanno stesso coefficiente a, cioè la medesima apertura e lo stesso verso, (fig.24).

5. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ e $c_1 \neq c_2$; il fascio non contiene rette, né ha punti base, la (3.5.1a) si trasforma per $k \neq -1$ in $y = a_1x^2 + b_1x + (c_1 + kc_2) / (1 + k)$; tale equazione evidenzia parabole che hanno la stessa concavità ed il medesimo asse di simmetria (come luogo dei vertici), in linea con quanto espresso nell'esempio 1 (fig.14) e dall'osservazione dell'esempio 2 (fig.15a e fig.15b) del par. **3.4**.

6. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ e $c_1 = c_2$; le due generatrici del fascio, p_1 e p_2 coincidono, per cui la loro combinazione lineare non rappresenta alcun fascio, ma solo una parabola.

L'intersezione tra le parabole generatrici può fornire geometricamente situazioni diverse, cioè due punti distinti, un punto di contatto (doppio), un punto d'intersezione, nessun punto in comune, come mostrano le figure seguenti. Essi si chiamano punti base.

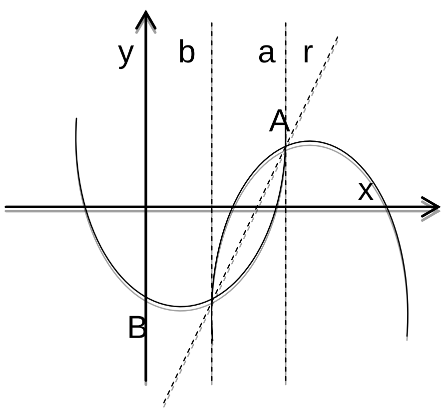

Fig.21

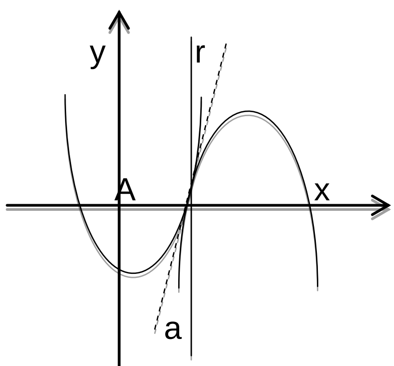

Fig.22

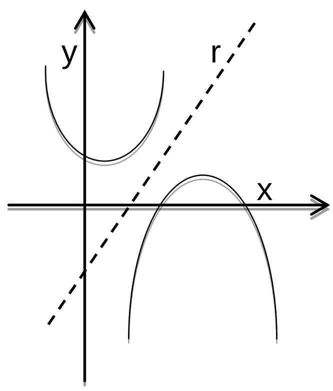

Fig.23

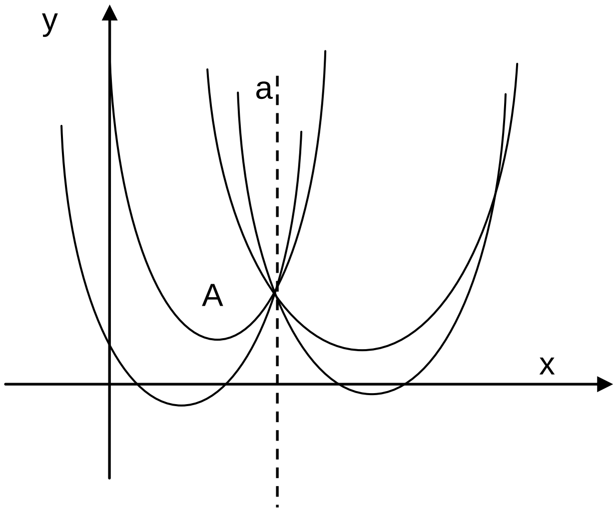

Fig.24

In tali situazioni si possono costruire fasci di parabole utilizzando gli eventuali punti base, che sono di fatto punti comuni a tutte le parabole della famiglia. E’ importante rilevare che la costruzione di un fascio deve contenere in ogni parabola (integra o degenere) i suoi punti base. In particolare, nel primo caso (fig.21) il fascio è formato dalla combinazione lineare della retta r (passante per A e B) con le rette verticali b e a (contenenti rispettivamente B e A). In sintesi: $r + ka \cdot b = 0$; quindi, se r, b e a hanno equazione rispettivamente $r: m_0x - y + q_0 = 0$, $b: x - x_B = 0$, $a: x - x_A = 0$, il fascio assume la forma:

$m_0x - y + q_0 + k \cdot (x - x_B)(x - x_A) = 0$ con $k \in \mathbf{R}$, (3.5.4)

in sintonia con quanto espresso nel punto a) del precedente paragrafo.

Nel secondo caso, essendo A il punto di tangenza delle parabole (fig.22), la combinazione lineare del fascio e formata dalla tangente r in A e dalla retta verticale a (contenente il punto doppio A), computata due volte. In sintesi: $r + ka^2 = 0$; di conseguenza, date le equazioni di r e a, che sono rispettivamente $r: m_0x - y + q_0 = 0$, $a: x - x_A = 0$, il fascio assume la forma:

$m_0x - y + q_0 + k \cdot (x - x_A)^2 = 0$ con $k \in \mathbf{R}$,

come illustrato nel punto b) del precedente paragrafo.

Nel terzo caso (fig.23), non essendoci punti in comune tra le parabole, l’equazione del fascio è riconducibile al modello espresso dall’equazione generica (3.5.1).

Nel quarto caso, con il solo punto di intersezione A, l’equazione del fascio si può costruire come combinazione lineare di una parabola p_1 e della retta verticale passante per A. In simboli: $p_1 + k \cdot a$, ossia $a_1x^2 + b_1x + c - y + k \cdot (x - x_A) = 0$.

Nel quinto caso, non essendoci punti di intersezione, l’equazione del fascio si può costruire come combinazione lineare di due parabole p_1 e p_2, con il solo termine noto variabile. Infatti se $p_1: y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ e $p_2: y = a_2x^2 + b_2x + c_2$, con $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ e $c_1 \neq c_2$, allora $p_1 + k \cdot p_2 = 0$ implica l’equazione $y = a_1x^2 + b_1x + (c_1 + kc_2) / (1 + k)$, già introdotta nel punto 5.

ESEMPIO 3.5.1 : Date le parabole p_1 e p_2 di equazione rispettivamente $y = x^2 - 2x - 1$ e $y = -x^2 + 3$, scrivere l'equazione del fascio f generato da p_1 e p_2; determinare poi: a) i punti base di f; b) le parabole degeneri; c) la parabola tangente alla retta t , $x + y - 4 = 0$.

La costruzione del fascio si ottiene facilmente attraverso la combinazione lineare di p_1 e p_2 espresse in forma implicita, con l'introduzione del parametro k: $p_1 + k \cdot p_2 = 0$, *cioè*
$x^2 - 2x - 1 - y + k(x^2 - 3 + y) = 0$, *con* $k \in$ **R**, *(p_2 non è rappresentata per alcun valore di k)*
A tale equazione va aggiunta la parabola p_2.

In merito alla richiesta del punto a) basta risolvere il sistema formato dalle equazioni di p_1 e p_2, per cui si ottiene :

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 1 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x^2 - 2x - 4 = 0 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases} ; \quad x_1 = -1 \vee x_2 = 2$$

da cui si ricavano i punti base $A(-1; 2)$ *e* $B(2; -1)$.

La risposta del punto b) risulta individuabile dopo aver scritto l'equazione di f con il parametro distribuito sulle variabili x e y; infatti si ottiene :

$$(1 + k)x^2 - 2x + (k - 1)y - 1 - 3k = 0 \quad (E.3.5.1)$$

Dalla (E.3.5.1) si deduce che
per $k = -1 \longrightarrow -2x - 2y + 2 = 0 \longrightarrow x + y - 1 = 0 \longrightarrow y = -x + 1$;
per $k = 1 \longrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \longrightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 2$.

Le parabole degeneri di f sono quindi la retta $y = -x + 1$ (passante per A e B) e la coppia di rette verticali $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$ (rispettivamente ascisse di A e di B).

Per ottenere la parabola di f tangente alla retta t di equazione $x + y - 4 = 0$, occorre impostare il sistema tra il fascio f e t , imponendo poi la condizione di tangenza $\Delta = 0$:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 - y + k(x^2 - 3 + y) = 0 \\ y = 4 - x \end{cases} ; \quad x^2 - 2x - 1 - 4 + x + k(x^2 - 3 + 4 - x) = 0 ;$$

da cui $(1 + k)x^2 - (k + 1)x + k - 5 = 0 ; \longrightarrow \Delta = 0 \longrightarrow (k + 1)^2 - 4(k + 1)(k - 5) = 0$;

$(k + 1)(k + 1 - 4k + 20) = 0 \longrightarrow k = -1 \vee k = 7$.

Per $k = -1$ si ricava la retta passante per i punti base A e B ; per $k = 7$ si ottiene la parabola richiesta : $8x^2 - 2x - 22 + 6y = 0$, da cui $y = -4/3\, x^2 + 1/3x + 11/3$ (fig.25)

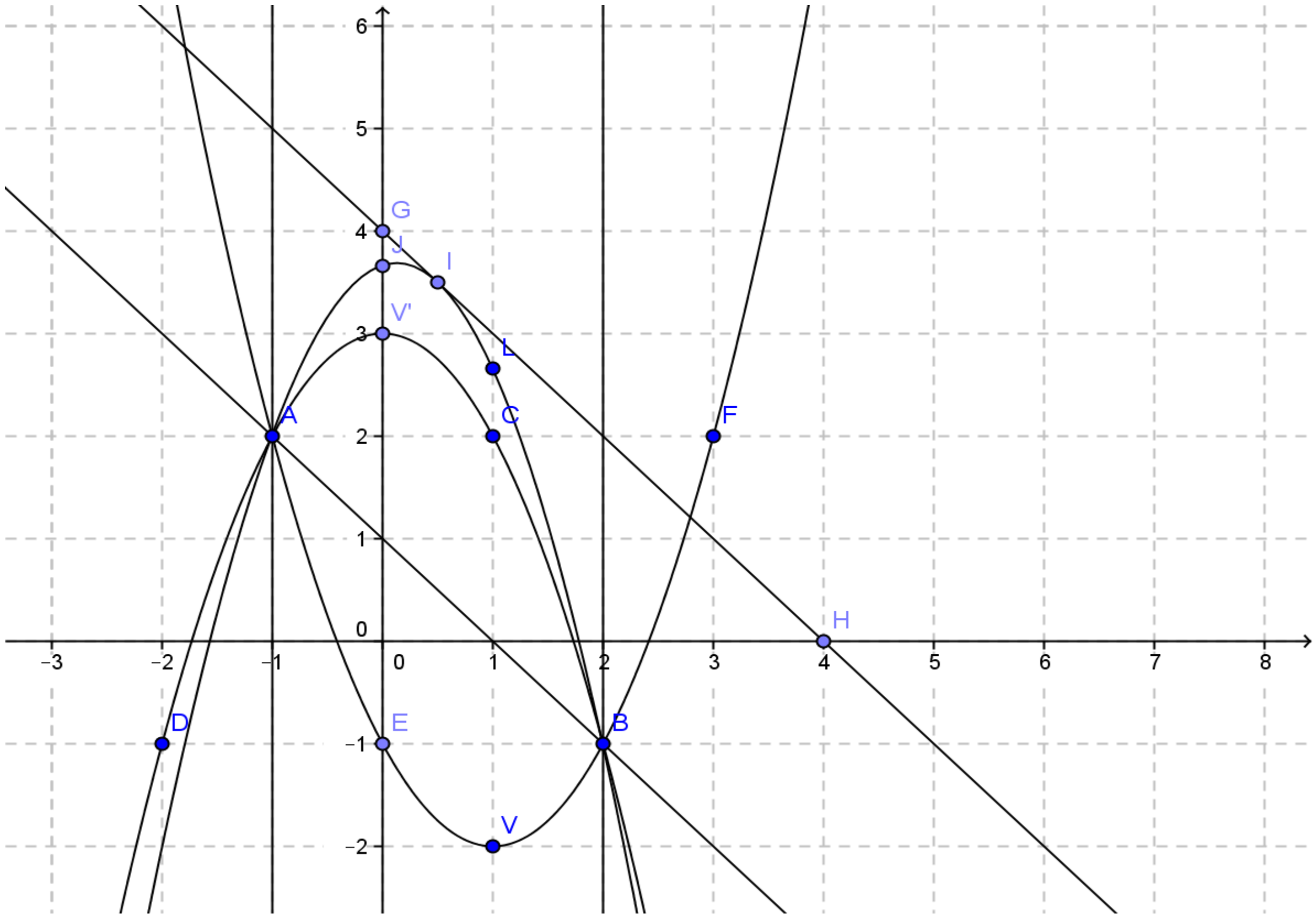

Fig.25

ESEMPIO 3.5.2 : Dopo aver individuato i punti base del fascio di parabole f ,
$(k + 1)x^2 + 2(k + 2)x – (k + 2)y + 4 = 0$, ($k \in R$) ,
determinare le parabole che soddisfano alle seguenti condizioni:
a) p_1 con vertice sulla retta $x = 1$; b) p_2 passante per il punto P(0 ; 6); c) p_3 avente per direttrice la retta $y = – 5/4$.

La premessa del quesito richiede la ricerca dei punti comuni a tutte le parabole del fascio f. Come nell'esempio precedente basta risolvere il sistema tra le parabole generatrici di f che si ottengono fattorizzando il parametro k; infatti l'equazione di f diventa:
$x^2 + 4x + 4 – 2y + k(x^2 + 2x – y) = 0$, *quindi:*

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 4 – 2y = 0 \\ x^2 + 2x – y = 0 \end{cases} . \qquad \begin{cases} x^2 + 4x + 4 – 2(x^2 + 2x) = 0; \\ x^2 + 2x = y \end{cases} \quad – x^2 + 4 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = – 2 \\ y_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 8 \end{cases} .$$

I punti base del fascio sono V(– 2 ; 0) e A(2 ; 8)

Nel caso di p_1 occorre sostituire l'ascissa del vertice $x_V = – (k + 2) / (k + 1)$ alla retta verticale $x = 1$; per cui si ottiene: $– (k + 2) / (k + 1) = 1$; risolvendo l'equazione si ricava il valore di k,

$– k – 2 = k + 1$; $k = – 3/2$. L'equazione di p_1 è calcolata con la sostituzione del valore k nel

fascio f, quindi: $– (1/2)x^2 + x – (1/2)y + 4 = 0$, cioè $y = – x^2 +2x + 8$ con vertice V''(1 ; 9).

La p_2 *si determina semplicemente sostituendo prima le coordinate di P all'equazione di f:*

$4 - 2 \cdot 6 - 6k = 0$, *da cui* $-8 = 6k$, $k = -4/3$. *Tale valore reinserito in f fornisce l'equazione richiesta:* $(-1/3)x^2 + (4/3)x - (2/3)y + 4 = 0$; *cioè* $y = -(1/2)x^2 + 2x + 6$, *con vertice A(2 ; 8).*

Nel caso c) conviene scrivere prima il fascio f in forma esplicita:
$y = x^2(k + 1)/(k + 2) + 2x + 4/(k + 2)$; *poi si applica a f l'equazione della direttrice*

$y = -(1 + \Delta)/4a$; *se* $1+\Delta = 1 + 4 - 4(k + 1)/(k + 2) \cdot 4/(k + 2) = \left[5(k + 2)^2 - 16(k + 1)\right]/(k + 2)^2$

allora $y = -\left[5(k + 2)^2 - 16(k + 1)\right]/4(k + 1)(k + 2) = -5/4$. *Effettuando i calcoli si ottiene:*

$5k^2 + 20k + 20 - 16k - 16 = 5(k^2 + 3k + 2)$, *con* $k \neq -1$ *e* $k \neq -2$; *da cui*
$5k^2 + 4k + 4 = 5k^2 + 15k + 10$; $-6 = 11k$; $k = -6/11$. *Sostituendo di nuovo k in f si ha:*

$5x^2 + 32x - 16y + 44 = 0$, *ossia* $y = (5/16)x^2 + 2x + 11/4 = 0$, *con vertice* $P(-16/5 ; -9/20)$.
Tutte le risposte sono rappresentate dalla fig.26

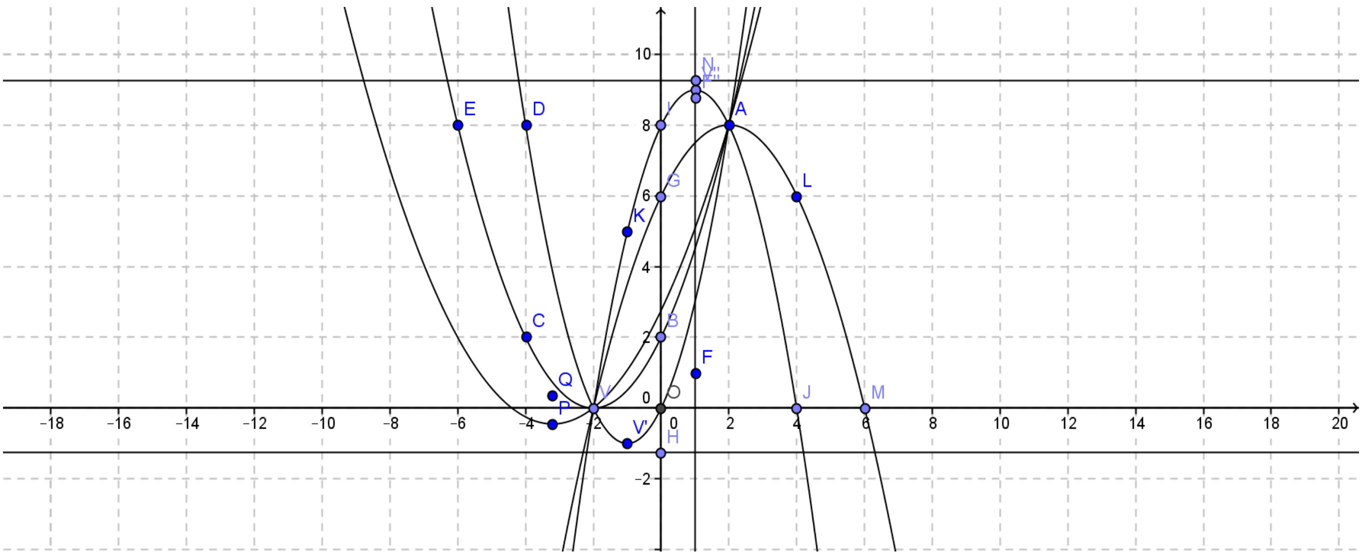

Fig.26

ESEMPIO 3.5.3 : Costruire prima il fascio di parabole con asse verticale avente come punti base A(1 ; 0) e B(3 ; 2) ; successivamente determinare le parabole che hanno il fuoco sull'asse y e sull'asse x.

1^ Procedura
Considerata la generica parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, *si impone il passaggio della curva per i punti A e B, in modo da ottenere il seguente sistema:*

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b = -c - a \\ 9a + 3(-c - a) + c = 2 ; \quad 9a - 3c - 3a + c = 2 ; \quad 6a - 2c = 2 \end{cases}$$

assumendo a valori arbitrari (si può porre anche a = k), si ricava $c = 3a - 1$ *e*
$b = 1 - 3a - a = 1 - 4a$; *per cui l'equazione del fascio è* $y = ax^2 + (1 - 4a)x + 3a - 1$.

2^ Procedura
Si determina prima la retta r per A e B e poi si applica la (3.5.4) attraverso la combinazione lineare di tale retta con le rette verticali per A e per B ; infatti la retta r ha equazione y = x – 1 (è parallela alla bisettrice del 1^ e 3^ quadrante e passa anche per (0 ; – 1)) e le rette verticali hanno equazione x = 1 e x = 3, quindi l'equazione del fascio assume la forma:
$x - y - 1 + k(x - 1)(x - 3) = 0$ *; svolgendo i calcoli si ha* $y = kx^2 - (4k - 1)x + 3k - 1 = 0$*,*
con le stesse generatrici della 1^ procedura, fig.27 .

Per la seconda parte del quesito è opportuno determinare le coordinate del fuoco in funzione del parametro a; dalla formula di F(- b/2a ; (1 – Δ)/4a) si ricava :

$x = (4a - 1)/2a$ *e* $y = \left(1 + 4a(3a - 1) - (4a - 1)^2\right)/ 4a$ *con* $a \neq 0$ *; da cui dopo semplici calcoli* $x = 2 - 1/2a$ *e* $y = 1 - a$ *. Ponendo nel primo caso x = 0 (asse y)* $4a - 1 = 0$*, da cui* $a = ¼$*, quindi la parabola del fascio ha equazione* $y = ¼(x^2 - 1)$*, con vertice in (0 ; ¼) ; nel secondo caso il fuoco sull'asse x impone la condizione y = 0, per cui a = 1, di conseguenza l'altra parabola è* $y = x^2 - 3x + 2$ *, con vertice in (3/2 ; – ¼) , fig. 27.*

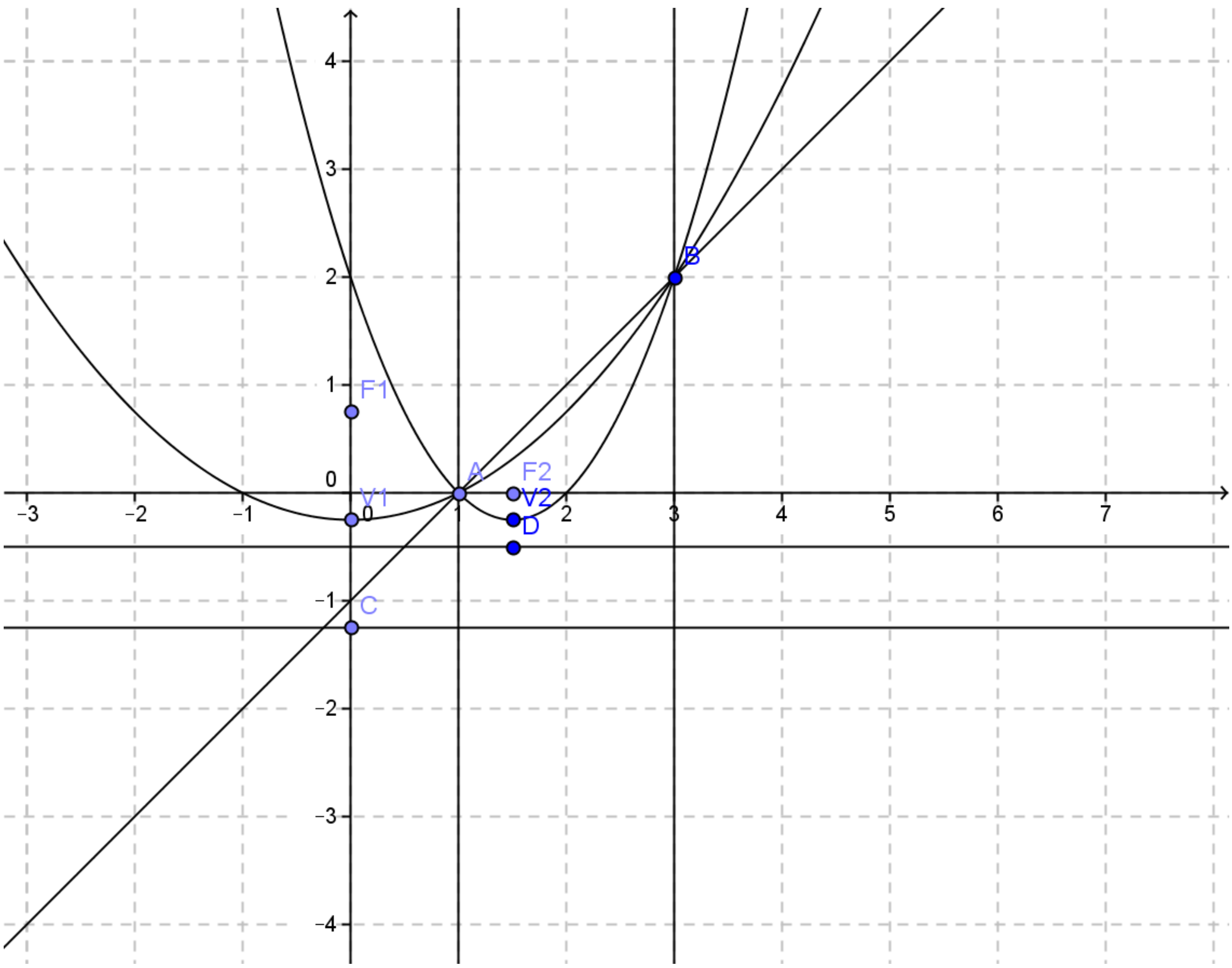

Fig.27

L'impostazione fornita per i fasci di parabole con assi verticali è estendibile anche a quelli con assi orizzontali attraverso le stesse modalità; basta ricordare di scambiare il ruolo delle variabili x e y nelle indicazioni illustrate. Un po' più complessa e articolata appare la nozione di fascio nel caso di parabole con asse obliquo, non tanto sul piano geometrico dove le proprietà si conservano, dopo aver effettuato trasformazioni isometriche, quanto sul piano algebrico in cui ciascuna parabola può esprimersi anche con sei termini. Infatti una combinazione lineare tra due parabole espresse nella forma (3.2.1) può esprimersi fino a 12 termini, che sono indubbiamente di difficile gestione; quindi sono consigliate strategie d'impostazione e di risoluzione diverse dalle precedenti, attraverso l'utilizzo dei punti base con parabole degeneri. Un adeguato approfondimento del tema viene trattato nello studio dei fasci di coniche in generale; comunque qualche esempio più semplice merita una trattazione anche in questo contesto.

ESEMPIO 3.5.4: Dopo aver costruito il fascio f di parabole con asse parallelo alla retta r di equazione $2x - y + 1 = 0$, avente come punti base l'origine O del riferimento cartesiano e A(1 ; - 1), determinare la parabola che passa per C(0 ; - 1). Calcolare poi le coordinate del vertice V, nonché le tangenti in O e V.

Trattandosi di una parabola con asse obliquo, conviene utilizzare il metodo delle parabole degeneri passanti per O e A; infatti individuare tali rette è semplice, basta imporre al fascio di rette improprio $2x - y + h = 0$ il passaggio per l'origine O(0 ; 0) e per A(1 ; - 1);

nel primo caso $h = 0$, quindi la retta o per O è $2x - y = 0$;
nell'altro caso si ottiene $2-(-1) + h = 0$, $h = -3$; quindi la retta a per A è $2x - y - 3 = 0$.

Inoltre la retta r OA ha equazione $x + y = 0$ (bisettrice del 1^ e 3^ quadrante).

A questo punto si scrive l'equazione del fascio, analogamente a quanto applicato nell'esempio precedente; in sintesi: $o \cdot a + kr = 0$, cioè

f : $(2x - y)(2x - y - 3) + k(x + y) = 0$ *, con* $k \in \mathbf{R}$ *. (E.3.5.4)*

Per determinare la parabola richiesta occorre sostituire le coordinate di C in f, per cui si ha:

$(0 + 1)(0 + 1 - 3) + k(0 - 1) = 0$; $k = -2$. *Inserendo tale valore in f, dopo semplici calcoli si ricava* $(2x - y)^2 - 3(2x - y) - 2x - 2y = 0$; *p:* $(2x - y)^2 - 8x + y = 0$

OSSERVAZIONI:
1) La parabola p passa per O (manca il termine noto), di conseguenza l'insieme dei termini di primo grado individua la retta tangente in O (facilmente verificabile con pochi calcoli);
2) I termini di secondo grado formano un quadrato perfetto, come accade in casi più semplici nelle parabole con assi verticali e orizzontali (unico monomio quadratico, $y = x^2$ e $x = y^2$);
3) Come nelle parabole ad assi verticali (o orizzontali) il termine di secondo grado individua generalmente la direzione parallela all'asse $x = 0$ (o $y = 0$), anche nell'esempio in corso $2x - y$ determina <u>la direzione dell'asse di simmetria</u> di p (non l'asse).

Da quanto espresso si può rispondere all'ultima parte del quesito, utilizzando il fascio di rette improprio, perpendicolari alla direzione dell'asse di simmetria ed impostare la condizione di tangenza per il vertice V. Infatti le rette perpendicolari a $2x - y = 0$ hanno equazione $x + 2y + q = 0$, che intersecate con la parabola p attraverso lo svolgimento del sistema, fornisce gli elementi necessari:

$$\begin{cases} (2x - y)^2 - 8x + y = 0 \\ x + 2y + q = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (-4y - 2q - y)^2 - 8(-2y - q) + y = 0 \\ x = -2y - q \end{cases} \qquad (-5y - 2q)^2 + 17y + 8q = 0 \;; \quad \textit{da cui:}$$

$$25y^2 + y(20q + 17) + 4q^2 + 8q = 0; \textit{ ponendo } \Delta = 0 \quad 400q^2 + 680q + 289 - 400q^2 - 800q = 0;$$

$-120q + 289 = 0$; $q = 289/120$. *La retta tangente in V è quindi* $x + 2y + 289/120 = 0$.

Per cercare le coordinate di V basta sostituire il valore di q nell'equazione risolvente del sistema: $y = (-20q - 17 + - 0)/50$; $y = -391/300$; $x = 391/150 - 289/120 = (1564 - 1445)/600 = 119/600$. *Quindi* $V(119/600 ; -391/300)$, *fig28.*

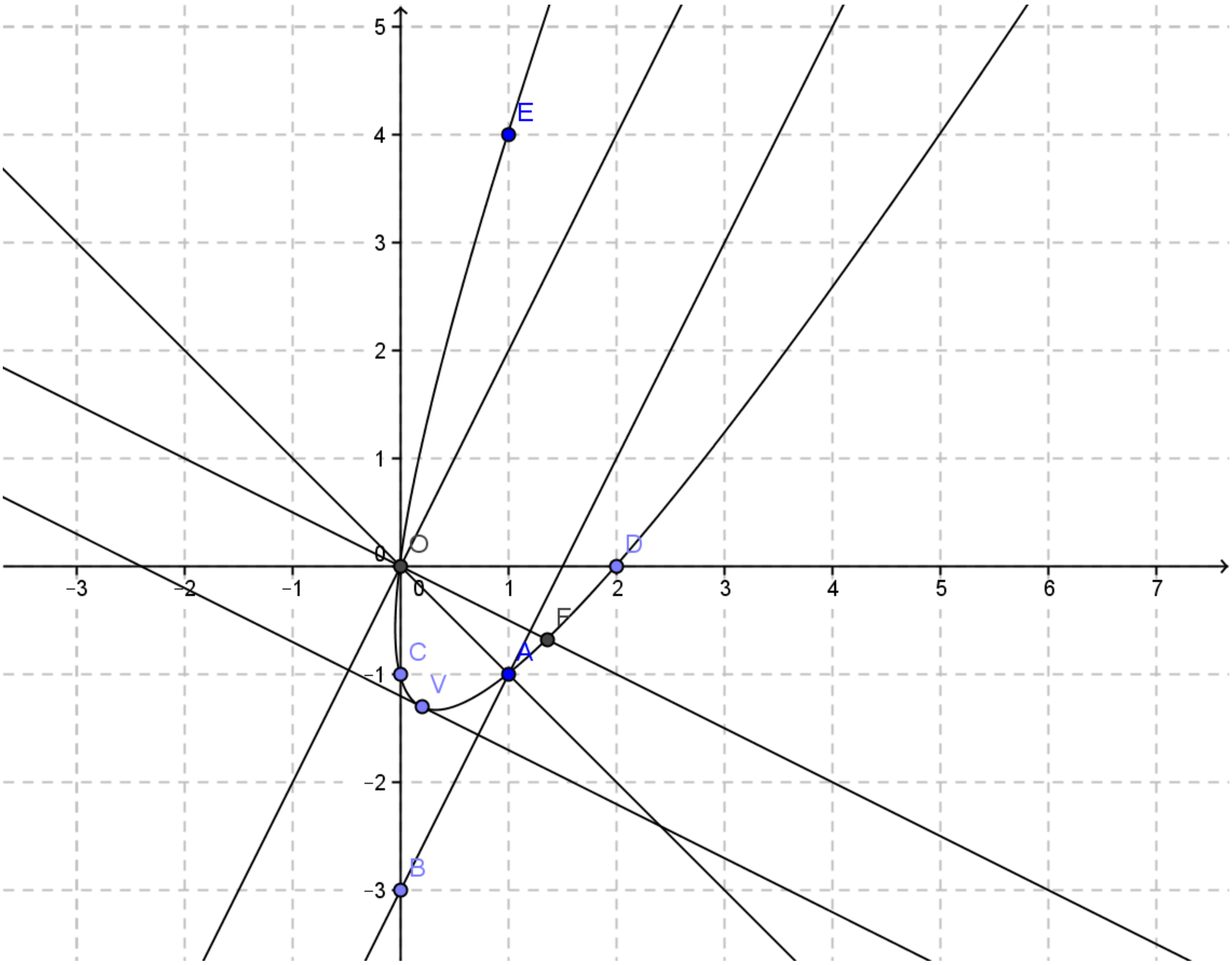

Fig.28

ESEMPIO 3.5.5: Determinare la parabola tangente nel punto A(1 ; 2) alla retta r, $x - y + 1 = 0$ e nell'origine O alla retta s, $x - 2y = 0$.

Dalle indicazioni dei punti base A e O, conviene utilizzare la combinazione lineare tra le due rette tangenti nei punti A e O e la retta t(OA) contata due volte; in simboli $r \cdot s + k \cdot t^2 = 0$, *cioè:*

$(x - y + 1)(x - 2y) + k(2x - y)^2 = 0$, *con* $k \in R$ *e dove* $2x - y = 0$ *rappresenta la retta t.*

Affinché il fascio descritto, che generalmente rappresenta curve di 2^ grado, sia una parabola, l'insieme dei termini di 2^ grado deve costituire il quadrato di un binomio in x e y. Effettuando i calcoli e distribuendo il parametro k si ottiene:

$(1 + 4k)x^2 - (3 + 4k)xy + (k+2)y^2 + x - 2y = 0.$ *(E.3.5.5)*

A questo punto basta imporre la condizione vincolante i termini di 2^ grado: $ax^2 + bxy + cy^2$, $b^2 - 4ac = 0$, *per cui deve risultare* $(3 + 4k)^2 - 4(1 + 4k)(k + 2) = 0.$

$9 + 24k + 16k^2 - 8 - 36k - 16k^2 = 0;$ $1 - 12k = 0$; $K = 1/12$

L'equazione fornisce quindi una soluzione di $K = 1/12$, *che sostituita nella (E.3.5.5), indica l'equazione della parabola richiesta,* $16x^2 - 40xy + 25y^2 + 12x - 24y = 0$, *meglio descritta in forma sintetica* $(4x - 5y)^2 + 12(x - 2y) = 0.$